

RT 003-04

Simulazione e analisi della tecnica GPS-LEO per la
valutazione dei profili di rifrattività atmosferica

Ivano Ricciarelli,
Stefania Bonafoni

22 Settembre 2004

Indice

1	Introduzione.....	3
2	La tecnica GPS-LEO	4
2.1	Sguardo storico.....	4
2.2	Significato d'occultamento radio nella tecnica GPS-LEO	4
3	Valutazione del problema	6
3.1	Ipotesi adottate	6
3.2	Descrizione del simulatore	7
3.2.1	Indice atmosferico utilizzato.....	7
3.2.2	Generazione della prima traiettoria	8
3.2.3	Incremento dei tempi e determinazione delle traiettorie successive	9
4	Calcolo dello scostamento Doppler atmosferico da misure sul ricevitore LEO	11
5	Valutazione dell'angolo di piegamento e del parametro di impatto attraverso misure dello scostamento Doppler: metodo indiretto	14
5.1	Sistema algebrico per la risoluzione del problema	14
5.1.1	Primo tipo di risoluzione.....	14
5.1.2	Secondo tipo di risoluzione	15
5.1.3	Discussione dei risultati ottenuti	16
6	Tecnica di inversione	18
6.1	Risultati: rifrattività	19
6.2	Risultati: risoluzione	20
6.2.1	Risoluzione verticale	20
6.2.2	Risoluzione orizzontale.....	21
7	Errore commesso.....	23
8	Valutazione della quota minima raggiunta dalla superficie terrestre.....	24
8.1	Confronto nella latitudine di Roma	24
8.2	Confronto fra la latitudine di Roma e delle Hawaii nei mesi di Luglio, Agosto e Settembre	25
9	RMS dell'errore.....	27
10	Conclusioni	28
11	Bibliografia.....	29

1 Introduzione

Il sistema GPS consta di 24 satelliti disposti su sei orbite poste ad un'altezza di 20231 km con inclinazione di 55°. Il segnale con polarizzazione circolare è irradiato su due portanti a frequenze $f_1=1575,43$ MHz e $f_2=1227,60$ MHz, modulate in fase con un codice pseudocasuale (P-code) e con una bit rate di 10,23 Mb/s. La portante f_1 è ulteriormente modulata con un secondo codice pseudocasuale a 1,023 Mb/s diverso per ogni satellite e utilizzato per una prima acquisizione. I dati riguardanti gli off-set degli orologi e le posizioni orbitali sono trasmessi con un messaggio sovrapposto a tutte e due le portanti. Poiché il GPS è nato per scopi militari, parte delle informazioni non sono accessibili da utenti civili e sono criptati attraverso un ulteriore codice Y-code [1], [10].

Le applicazioni del sistema GPS si sono moltiplicate col passare degli anni, andando ad interessare i campi più svariati. Tra i tanti, quello meteorologico ne ha tratto, e probabilmente ne trarrà in futuro, grandi benefici in termini di qualità/prezzo.

Fin da subito l'interesse fu indirizzato verso la possibilità di ottenere informazioni sul contenuto integrato di vapor d'acqua lungo la traiettoria seguita dal segnale, a partire dalla conoscenza del suo ritardo di propagazione [7].

A partire dal 1995 uno studio condotto dal JPL (Jet Propulsion Laboratory) in collaborazione con la NASA ha dimostrato la possibilità di calcolare profili atmosferici invertendo gli scostamenti di fase misurati sul segnale ricevuto da un ricevitore GPS a bordo di un satellite in orbita bassa (LEO) in condizione di radio occultamento. In questo caso con il termine occultamento si intende la visibilità dei due satelliti anche se non sono in LOS (Line Of Sight, vista ottica).

Nella prima parte del lavoro saranno ripercorsi i passi fondamentali dell'inversione di misure satellitari, ottenibili in condizioni di radio occultamento. In realtà è stata analizzata la tecnica necessaria per simulare gli osservabili GPS a partire da un modello atmosferico di riferimento, osservabili ai quali è stata poi applicata la procedura di inversione che ha permesso, a sua volta, di ottenere una stima del modello atmosferico da confrontare con quello di riferimento. Analizzeremo poi l'andamento della risoluzione spaziale in base alle leggi della rifrazione con l'evolversi dell'evento di occultamento considerato e come essa non sia strettamente dipendente dalla frequenza di campionamento adottata dal sistema.

Nella seconda parte è stata invece trattata l'inversione di misure effettuate dal sistema GPS-LEO. L'analisi è stata applicata alle misure GPS simulate a partire da un modello atmosferico di riferimento di due tipi: il primo è costruito da modello ed è utilizzato principalmente per testare la bontà del simulatore, il secondo invece è calcolato sfruttando le grandezze campionate da RAOB (RAdio OBservation), quali la temperatura, la pressione e l'umidità relativa dell'atmosfera. Sarà soprattutto attraverso l'utilizzo di RAOB che cercheremo di dare una giustificazione fisica alle diverse risposte del sistema GPS-LEO. I risultati ottenuti lasciano sperare a futuri sviluppi nell'utilizzo della tecnica GPS-LEO nel monitoraggio dell'atmosfera terrestre.

2 La tecnica GPS-LEO

2.1 Sguardo storico

Nella costellazione GPS ogni satellite, ad un'altezza di 20231 km, ha un periodo di rotazione di circa 12 ore quindi mettendo un satellite in orbita bassa o LEO (Low Earth Orbit) a 800 km su un'orbita polare, è possibile effettuare fino a 500 occultamenti al giorno distribuite uniformemente sulla superficie del globo. Il numero d'occultamenti può essere raddoppiato se il singolo ricevitore è in grado di ricevere il segnale proveniente dai satelliti Russian Global Navigation Satellite System (GLONASS). Il progetto finale prevede un insieme di 25 GPS/GLONASS in orbita bassa con una capacità 25000 occultamenti giornalieri e una copertura superficiale con passo pari a 150 km².

Nella figura sottostante sono riportati gli occultamenti osservati durante 7 ore del giorno 23 maggio 1995.

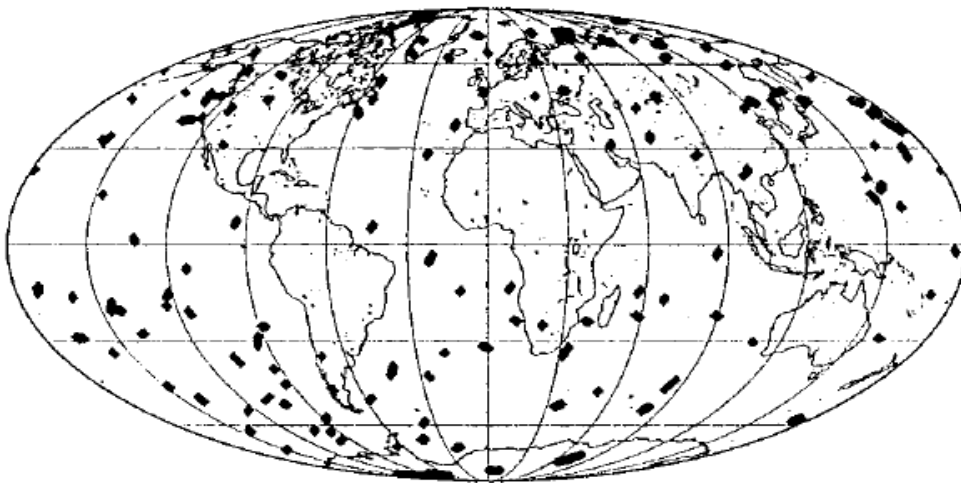


Figura 2.1 Occultamenti nelle 7 ore dell'esperimento del JPL del 23 maggio 1995.

Come si può vedere dalla figura 1.1 sono presenti rombi e rombi allungati. Questo dipende dal tipo di traiettoria seguita dal GPS-LEO. Nel primo caso avremo un sondaggio verticale mentre nel secondo caso avremo un sondaggio obliquo.

2.2 Significato d'occultamento radio nella tecnica GPS-LEO

Con il termine occultamento radio s'intende la propagazione del segnale su una traiettoria non rettilinea (incurvata dall'atmosfera) tale che esso possa essere ricevuto direttamente anche quando trasmettitore e ricevitore non sono in LOS (Line Of Sight, vista ottica) [5].

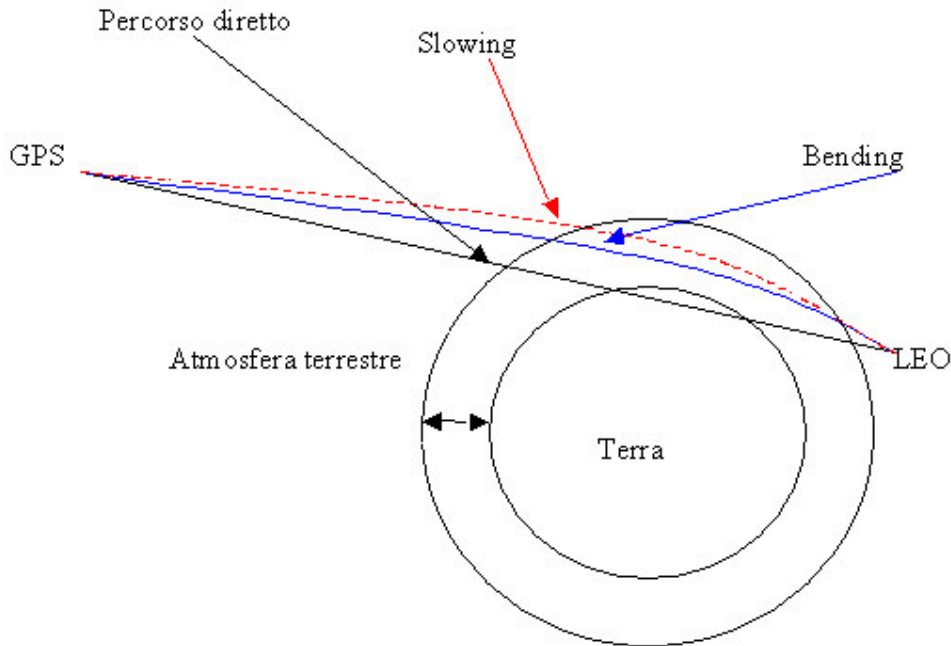


Figura 2.2 Occultamento radio nella tecnica GPS-LEO. Piegamento della traiettoria ad opera dell'atmosfera terrestre. Separazione del contributo di Slowing e di Bending.

Il verificarsi dell'occultamento in linea del tutto teorica comporta un eccesso di percorso elettromagnetico se rapportato con il percorso ottico. Si ricorda in proposito che l'eccesso di fase espresso in termini di lunghezza ottica in metri, può essere calcolato analiticamente con la seguente formula integrale

$$\Delta L = \int_L n(s) ds - G \quad (2.1)$$

dove L è il percorso incurvato, funzione dell'ascissa curvilinea s e G è la lunghezza del percorso ottico. Come si vede dalla formula 2.1, il piegamento a cui è sottoposto un segnale che attraversa l'atmosfera terrestre dipende da tutti gli strati atmosferici attraversati dal segnale stesso. Aggiungendo e togliendo alla 2.1 l'integrale lungo L di 1 in ds si ha

$$\Delta L = \int_L (n(s) - 1) ds + (S - G) \quad (2.2)$$

dove S è la lunghezza di L . Il termine integrale è detto di slowing e valuta l'eccesso di percorso elettromagnetico dovuto alla variazione della velocità di propagazione per opera della variazione dell'indice di rifrazione; il secondo termine, di bending, riporta la distanza geometrica, ulteriore eccesso di percorso elettromagnetico, fra la traiettoria rettilinea, ossia non sottoposta al piegamento atmosferico e la traiettoria che invece subisce il piegamento atmosferico. Anche se spiegato con maggior dettaglio in seguito, possiamo dire che la tecnica GPS-LEO sfrutterà questo ritardo di fase per analizzare l'indice di rifrazione dell'atmosfera terrestre.

3 Valutazione del problema

3.1 Ipotesi adottate

Per snellire la difficoltà del problema è stato necessario formulare delle ipotesi, fisicamente accettabili.

La prima ipotesi fatta è sulla natura dell'atmosfera terrestre, supponendola sferica e non ellittica. La terra, infatti, presenta un appiattimento ai poli, quantificato con il numero 0.003582 che rappresenta il rapporto tra il semiasse minore e il semiasse maggiore della terra. L'appiattimento terrestre implica una forma ellissoidale della struttura stessa che è prolungata anche all'atmosfera sotto l'influenza della forza di gravità ai gas atmosferici. Poiché si prende in considerazione il sistema satellitare GPS con quote di 20000 km dalla superficie terrestre, tale appiattimento può essere ipotizzato nullo. Applicando questa ipotesi alla formula di Snell di seguito riportata

$$n_1 \sin(\text{incidente}) = n_2 \sin(\text{rifratto}) \quad (3.1)$$

si avrà che l'angolo d'incidenza d'entrata sullo strato atmosferico coincide con l'angolo rifratto uscente dallo stesso strato e l'angolo rifratto entrante coincide con l'angolo incidente uscente come mostra la figura 3.1.

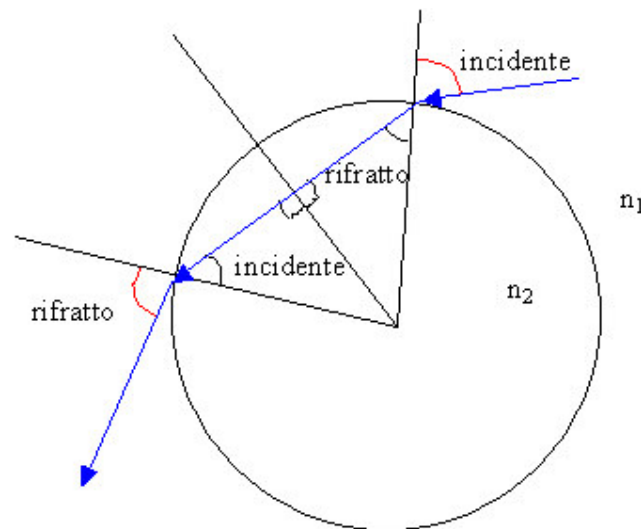


Figura 3.1 Effetto dell'ipotesi di sfericità sull'applicazione della legge di Snell.

Poiché le distanze tra satelliti sono approssimativamente dell'ordine dei 20000 km e la lunghezza d'onda più grande del sistema è di circa 24 cm, è possibile valutare la propagazione del segnale adottando l'ottica geometrica.

L'ultima ipotesi che si fa è la coplanarità delle orbite dei satelliti, ossia la simulazione presenta un aspetto bidimensionale.

3.2 Descrizione del simulatore

Nello schema a blocchi riportiamo la struttura del simulatore: in seguito analizzeremo separatamente i vari blocchi e descriveremo i parametri qui introdotti.

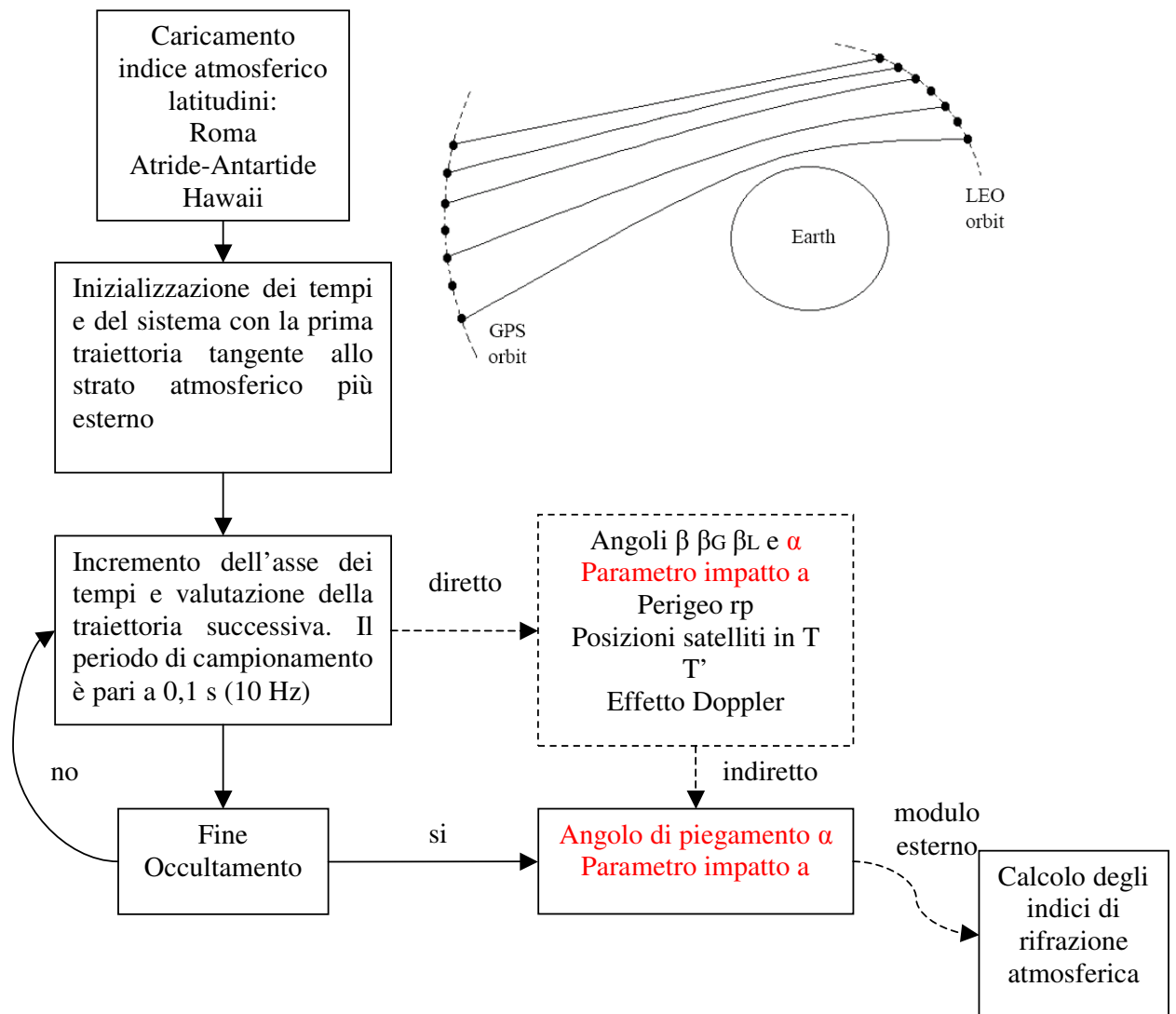


Figura 3.2 Schema a blocchi del simulatore implementato per simulare l'evento d'occultamento.

Di seguito andremo ad analizzare passo passo i vari blocchi del programma.

3.2.1 Indice atmosferico utilizzato

Abbiamo utilizzato due tipologie di indici atmosferici [7]

1. il primo teorico è costruito da modello esponenziale considerando nulla la componente dry della rifrattività rendendolo simile ad una rifrattività con latitudine artica o antartica

$$n = N \cdot 10^{-6} + 1 = N_{dry} \cdot 10^{-6} + 1 \quad (3.2)$$

2. il secondo misurato sfrutta la ben nota legge di Thayer applicata a dati RAOB nelle latitudini di Roma (41° 48' 9") e delle Hawaii (dal 23° al 18°)

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 = 77.6 \cdot \frac{P}{T} + 3.73 \cdot 10^5 \cdot \frac{P_e}{T^2} = N_{dry} + N_{wet} \quad (3.3)$$

$$P_e = P \cdot e$$

dove

- N = rifrattività
- n = indice di rifrazione
- P = pressione totale atmosferica in mb
- T = temperatura assoluta in K
- P_e = pressione parziale del vapor d'acqua.
- e = umidità relativa
- N_{dry} = parte "dry" poco variabile [250 < N_d < 300]
- N_{wet} = parte "wet" altamente variabile [10 < N_w < 200]

3.2.2 Generazione della prima traiettoria

La prima traiettoria che inizializza sia il sistema che l'asse dei tempi è quella tangente allo strato atmosferico più esterno. Tale traiettoria è calcolata una volta aver dato in ingresso al simulatore i dati generali, quali le altezze dei satelliti GPS e LEO (rispettivamente 20231 km e 800 km dalla superficie terrestre), che nella simulazione sono sommate al raggio terrestre di 6378 km. Sono inoltre specificate le velocità dei due satelliti che sono di 7 km/s per il LEO e 3.84 km/s per il GPS e quindi il periodo orbitale per le orbite circolari

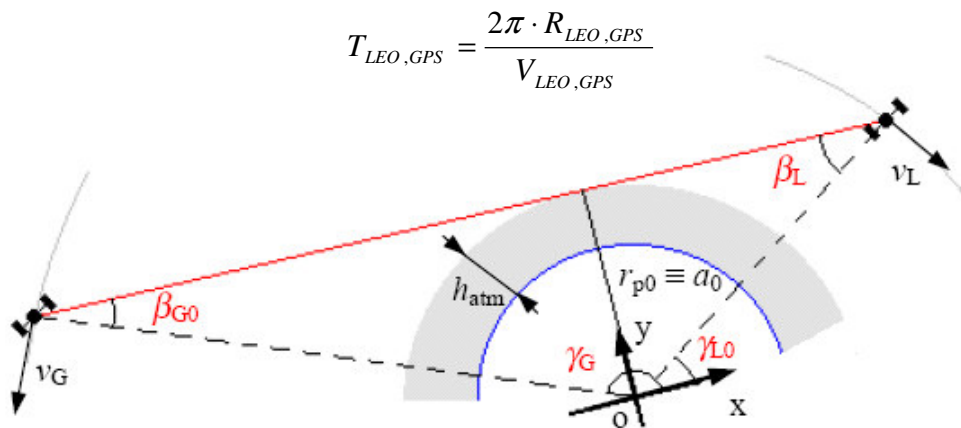


Figura 3.3 Prima traiettoria tangente allo strato atmosferico più esterno.

3.2.3 Incremento dei tempi e determinazione delle traiettorie successive

Il ricevitore GPS posto sul satellite LEO, in un sistema reale, valuta di solito il segnale ricevuto ogni 0.02 secondi, ossia con una frequenza di 50 Hz: noi utilizzeremo 10 Hz, quindi quando parlerò d'istante di campionamento mi riferirò ad una generica situazione rappresentata nella figura 3.4

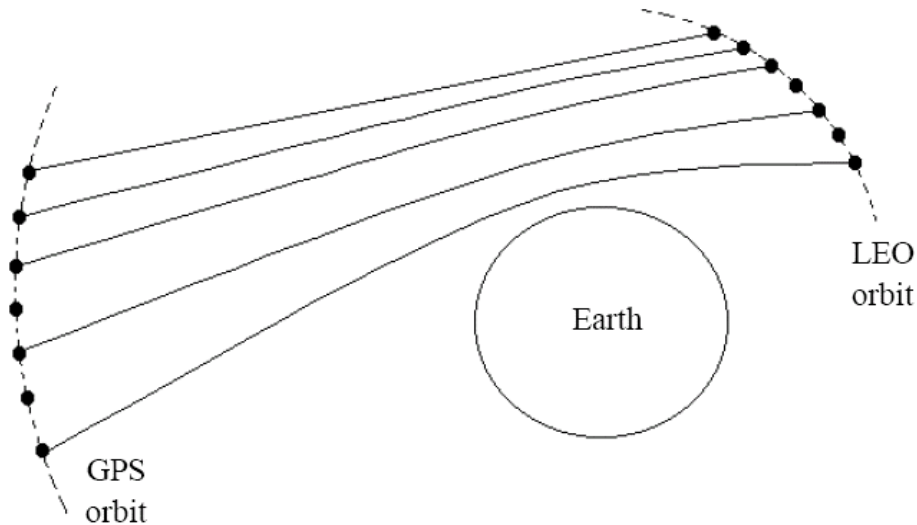


Figura 3.4 Andamento temporale del sistema GPS-LEO e traiettorie ottenute ad ogni evento di occultamento.

La costruzione della traiettoria si basa sulle leggi dell'ottica geometrica che regola la propagazione di un'onda piana in un mezzo stratificato dove il segnale si propaga seguendo una traiettoria rettilinea all'interno dello strato e risente del piegamento solamente sull'interfaccia di separazione di due strati adiacenti [12] [13] [14]

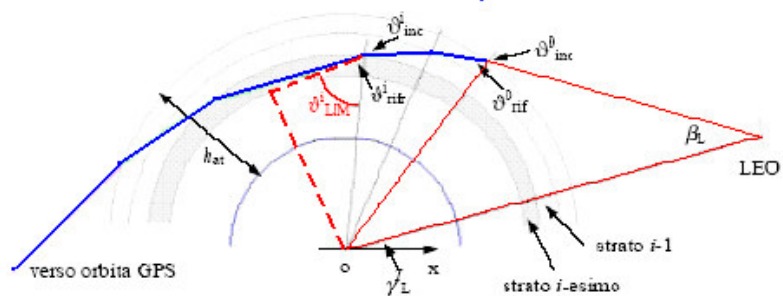


Figura 3.5 Andamento spaziale della traiettoria a spezzata che attraversa l'atmosfera terrestre seguendo le leggi dell'ottica geometrica.

Per ogni traiettoria andremo a calcolare il numero progressivo identificativo del campionamento

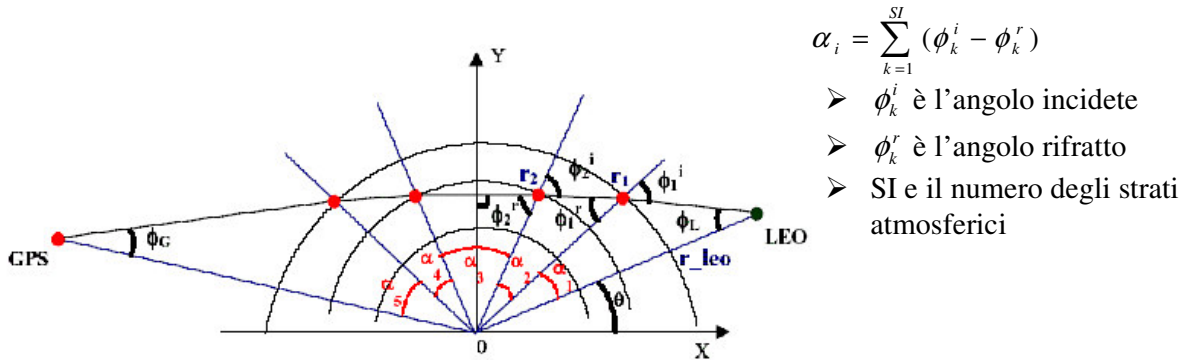
- strato d'appartenenza del perigeo
- parametro d'impatto [m] definito come la distanza dall'asintoto della traiettoria al centro di massa della terra
- perigeo [m] definito come la distanza minima della traiettoria al centro di massa della terra
- la posizione del LEO all'istante T
- la posizione del GPS all'istante T'

- l'angolo β formato fra le congiungenti dei due satelliti al centro di massa della terra
- la coordinate delle posizioni dei in T per il LEO e $T'=T-T_{\text{delay}}$ per il GPS [11]

Tempo LEO	Tempo GPS
T_0	$T'_0 = T_0 - T_{\text{delay}0}$
T_1	$T'_1 = T_1 - T_{\text{delay}1}$
T_2	$T'_2 = T_2 - T_{\text{delay}2}$
T_3	$T'_3 = T_3 - T_{\text{delay}3}$
T_4	$T'_4 = T_4 - T_{\text{delay}4}$
T_5	$T'_5 = T_5 - T_{\text{delay}5}$
T_6	$T'_6 = T_6 - T_{\text{delay}6}$

I due istanti temporali sono diversi a seconda dei due satelliti perché associamo il ritardo di propagazione del segnale nella posizione del trasmettitore GPS

- l'angolo di piegamento α calcolato in modo diretto, dove per metodo diretto intendiamo il calcolo del valore di tale angolo come differenza fra angolo incidente e rifratto su ogni interfaccia di separazione fra strati atmosferici adiacenti



$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{SI} (\phi_k^i - \phi_k^r)$$

- ϕ_k^i è l'angolo incidente
- ϕ_k^r è l'angolo rifratto
- SI è il numero degli strati atmosferici

- gli angoli d'apertura β_G e β_L

I parametri menzionati sono riportati nella figura 3.6

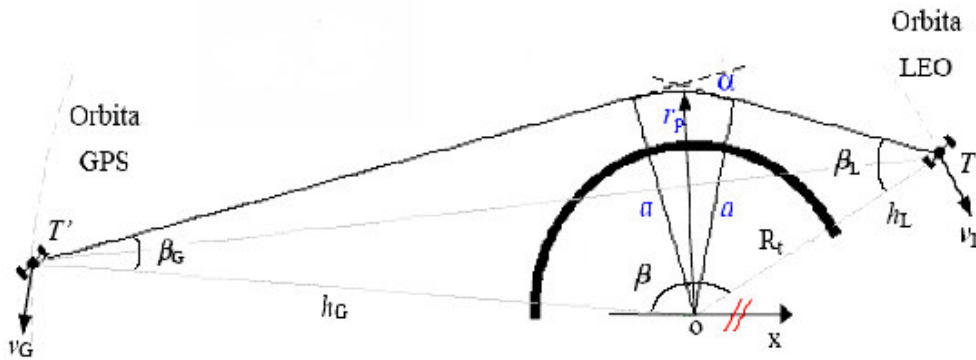


Figura 3.6 Parametri geometrici quali il parametro di impatto a , il perigeo r_p , gli angoli d'apertura β_G e β_L , l'angolo di piegamento α calcolato in modo diretto, le coordinate delle posizioni dei satelliti in T per il LEO e $T'=T-T_{\text{delay}}$ per il GPS, l'angolo β formato fra le congiungenti dei due satelliti al centro di massa

Tutte le simulazioni sono state fatte con una frequenza di campionamento di 10 Hz. La scelta di questa è stata fatta in funzione della profondità di penetrazione della traiettoria verso la superficie terrestre. La valutazione della frequenza è stata fatta su un profilo teorico, che come altezza minima, arriva ad oltre 5,5 km. Lo studio in frequenza è stato fatto con 1 Hz, 10 Hz, 25 Hz, 50 Hz e 75 Hz. Quello che ci interessa valutare è la variazione della quota minima dalla superficie terrestre in funzione della frequenza. In pratica ci aspettiamo che a frequenze elevate la quota minima tenda a diminuire. La figura sottostante mostra le quote minime raggiunte dalla superfici terrestri alle varie frequenze e con le rispettive ore di elaborazione su un
 -pentium IV; clock 2,8 GHz
 -RAM: 1 Giga byte

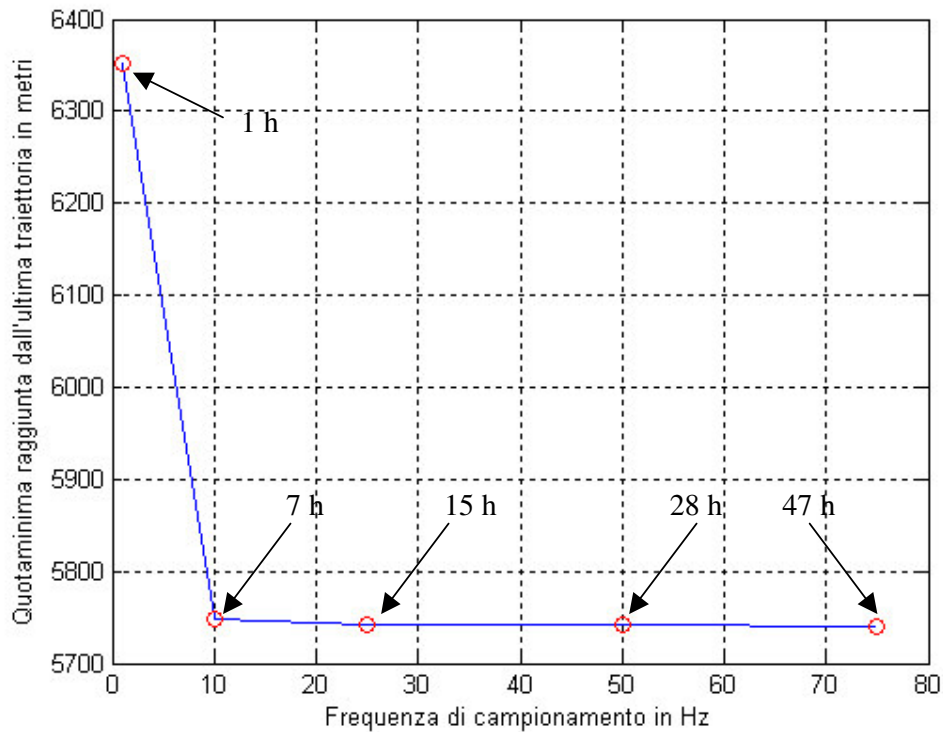


Figura 3.7 Quota minima raggiunta dalla superficie terrestre in funzione della frequenza di campionamento con le rispettive ore di elaborazione.

Un risultato importante ottenuto da tale confronto è che la quota del perigeo dalla superficie terrestre è indipendente dalla frequenza al di sopra dei 25 Hz. Come vedremo tale quota dipenderà strettamente dai profili altimetrici della temperatura e dell'umidità relativa.

4 Calcolo dello scostamento Doppler atmosferico da misure sul ricevitore LEO

Nella realtà il sistema GPS-LEO valuta l'effetto Doppler ricevuto dal LEO come derivata temporale dell'eccesso di fase [8] [9].

$$\Delta f_D = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \quad (4.1)$$

Anche se abbiamo utilizzato una frequenza di campionamento di 10 Hz, i campioni di fase da derivare in funzione del tempo per calcolare l'effetto Doppler restano pochi, causando una perdita dell'effettiva validità del sistema GPS-LEO (va ricordato infatti che il sistema reale adotta una frequenza di campionamento di 50 Hz). Per aggirare questo problema affronteremo la valutazione dell'effetto Doppler attraverso le grandezze geometriche che si presentano in ogni istante di campionamento. Andremo a valutare l'effetto Doppler f_D^{Rx} complessivo che si presenta al ricevitore LEO una volta che il segnale attraversa l'atmosfera terrestre e da questo andremo a separare lo scostamento Doppler dovuto alla sola atmosfera Δf_D sottraendo a f_D^{Rx} lo scostamento Doppler del moto dei satelliti nel vuoto f_D^{vel} .

$$\Delta f_D = f_D^{Rx} - f_D^{vel} = \frac{f}{c} [(\vec{v}_G \cdot \hat{u}_G + \vec{v}_L \cdot \hat{u}_L) - (\vec{v}_G \cdot \hat{u} + \vec{v}_L \cdot \hat{u})] \quad (4.2)$$

La figura 4.1 riporta i dati utilizzati ad ogni istante di campionamento per ottenere lo scostamento Doppler atmosferico

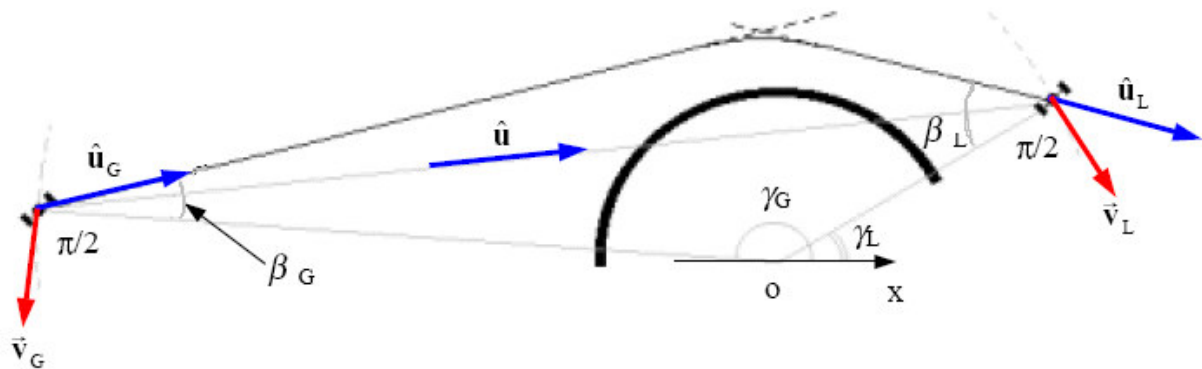


Figura 4.1 Vettori delle velocità nel vuoto della traiettoria piegata e non piegata che si presentano ad ogni istante di campionamento.

- u_G è il versore della traiettoria trasmessa dal GPS
- u_L è il versore della traiettoria ricevuta dal LEO
- u è il versore della traiettoria che unisce i due satelliti senza piegamento
- γ_G è l'angolo formato dal GPS con il sistema di riferimento scelto
- γ_L è l'angolo formato dal LEO con il sistema di riferimento scelto
- β_G è l'angolo di apertura della traiettoria del GPS
- β_L è l'angolo di apertura della traiettoria del LEO
- v_G è la velocità di rotazione del GPS
- v_L è la velocità di rotazione del LEO

Lo scostamento Doppler atmosferico è dell'ordine di qualche centinaio di Hz a differenza dello scostamento Doppler delle velocità relative nel vuoto che è dell'ordine dei KHz. Tale fenomeno era prevedibile analizzando le grandezze fisiche che caratterizzano tali valori. L'atmosfera terrestre è infatti dell'ordine dei 100 km, mentre le distanze medie dei satelliti sono dell'ordine dei 20000 km. Nelle figure che seguono vengono riportati l'effetto Doppler complessivo e lo scostamento Doppler atmosferico per un occultamento nella latitudine di Roma del 17/06/1998 ore 17.00. Tali valori sono riferiti alla frequenza di lavoro $f_1=1575,43$ MHz.

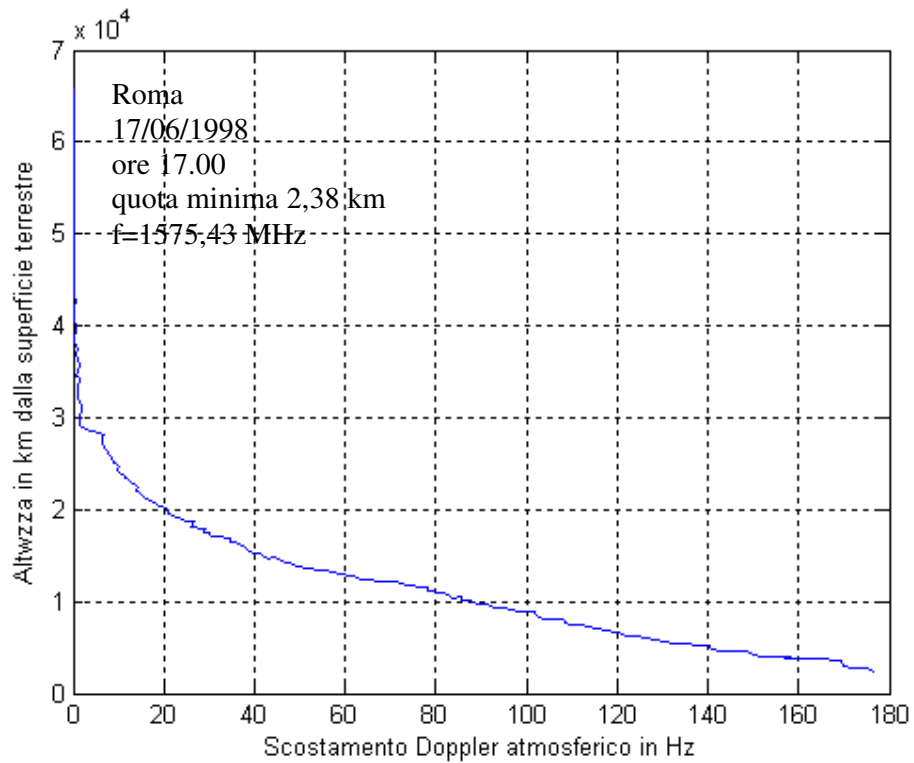
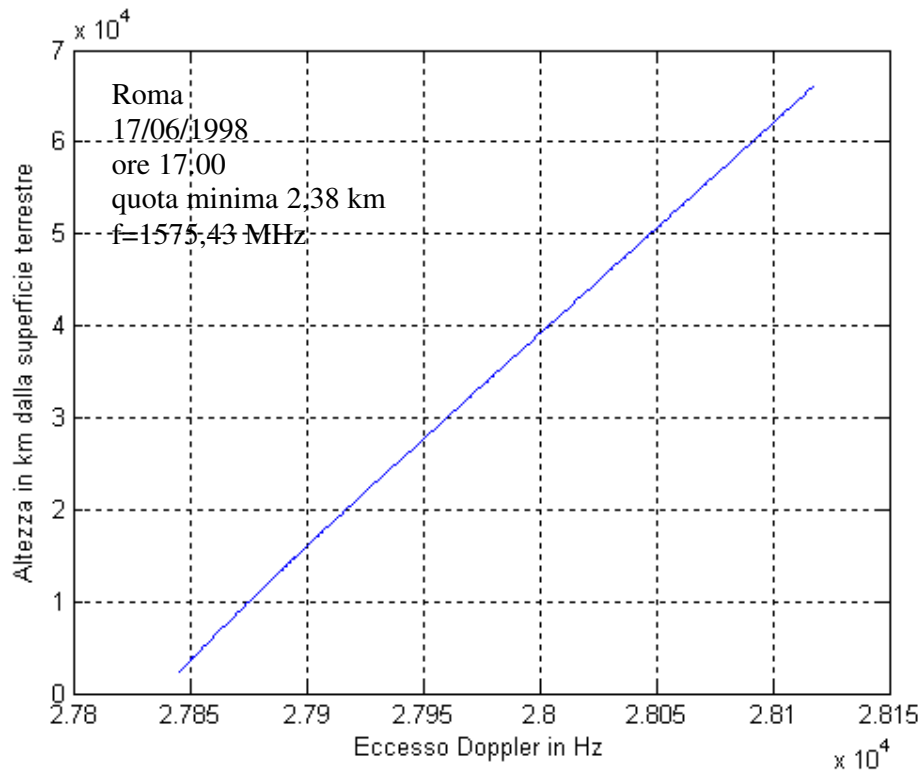


Figura 4.2 Effetto Doppler complessivo (sopra) e scostamento Doppler atmosferico (sotto) per l'occultamento nella latitudine di Roma del 17/06/1998 ore 17.00. Tali valori si riferiscono alla frequenza di lavoro $f_1=1575,43$ MHz.

5 Valutazione dell'angolo di piegamento e del parametro di impatto attraverso misure dello scostamento Doppler: metodo indiretto

Una volta calcolato lo scostamento Doppler atmosferico, siamo in grado di calcolare l'angolo di piegamento e il parametro di impatto in modo indiretto per ogni traiettoria campionata. Per metodo indiretto ci riferiamo al fatto che per calcolare tali grandezze abbiamo a disposizione solo lo scostamento Doppler, come nel caso di utilizzo di dati reali, ossia non andremo più ad utilizzare i parametri calcolati dal simulatore. In pratica per la valutazione di tali grandezze andremo nuovamente a sfruttare la geometria del problema. Facendo riferimento alla figura 5.1

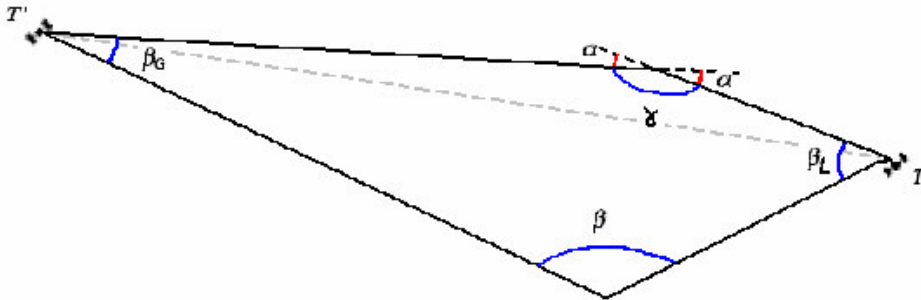


Figura 5.1 Grandezze geometriche per il calcolo dell'angolo di piegamento.

si nota che l'angolo di piegamento α è il supplementare dell'angolo γ di un generico parallelogramma che si ha per costruzione ad ogni istante di campionamento, ossia

$$\alpha = \pi - (2\pi - \beta - \beta_L - \beta_G) = \beta_G + \beta_L + \beta - \pi \quad (5.1)$$

Del parallelogramma conosciamo, direttamente, solo l'angolo β formato dalle posizioni dei due satelliti al centro di massa una volta note le coordinate spaziali.

5.1 Sistema algebrico per la risoluzione del problema

Poiché abbiamo due incognite β_G e β_L , abbiamo bisogno di due equazioni per la loro risoluzione. Andremo a sfruttare le equazioni utilizzate per il calcolo dello scostamento Doppler atmosferico e la formula per il parametro di impatto a , ossia

$$\begin{cases} \Delta f_D = \frac{f}{c} [(\vec{v}_G \cdot \hat{u}_G + \vec{v}_L \cdot \hat{u}_L) - (\vec{v}_G \cdot \hat{u} + \vec{v}_L \cdot \hat{u})] \\ h_G \sin(\beta_G) - h_L \sin(\beta_L) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Come si vede il sistema 5.2 è un sistema algebrico non lineare. La non linearità è data dalla presenza di funzioni circolari. Riferendoci infatti alla 5.2 si vede che l'incognite sono contenute all'interno di coseni. Per tale motivo sono stati adottati due tipi di risoluzione del sistema.

5.1.1 Primo tipo di risoluzione

La prima si ottiene risolvendolo per sostituzione trattandolo come un sistema lineare.

$$\beta_G = \sin^{-1} \left[\frac{\frac{\Delta f_{DC}}{f_1} + v_G \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta'_G\right) + v_L \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta'_L\right)}{\left(v_L \frac{h_G}{h_L} - v_G\right)} \right] \quad (5.3)$$

$$\beta_L = \sin^{-1} \left[\frac{h_G}{h_L} \sin(\beta_G) \right]$$

Da un'analisi delle soluzioni si vede che le funzioni cosinusoidali possono essere considerate come costanti una volta noti gli angoli di apertura del vuoto β'_G e β'_L . Per quanto riguarda la funzione arcseno sappiamo che essa è iniettiva e quindi non ambigua una volta definito un periodo di esistenza delle variabili. In generale dunque è un sistema di risoluzione da non escludere.

5.1.2 Secondo tipo di risoluzione

La seconda soluzione si ottiene utilizzando il metodo iterativo del calcolo delle piccole variazioni [3]. Si parte da sistema 5.2, sviluppandolo come

$$\begin{cases} \frac{\Delta f_D}{f} c - [(\vec{v}_G \cdot \hat{u}_G + \vec{v}_L \cdot \hat{u}_L) - (\vec{v}_G \cdot \hat{u} + \vec{v}_L \cdot \hat{u})] = 0 \\ h_G \sin(\beta_G) - h_L \sin(\beta_L) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Le incognite del sistema non sono più gli angoli di apertura del GPS del LEO per la traiettoria piegata, ma l'incremento rispetto agli angoli di apertura della traiettoria rettilinea per ottenere gli angoli di apertura di quella piegata.

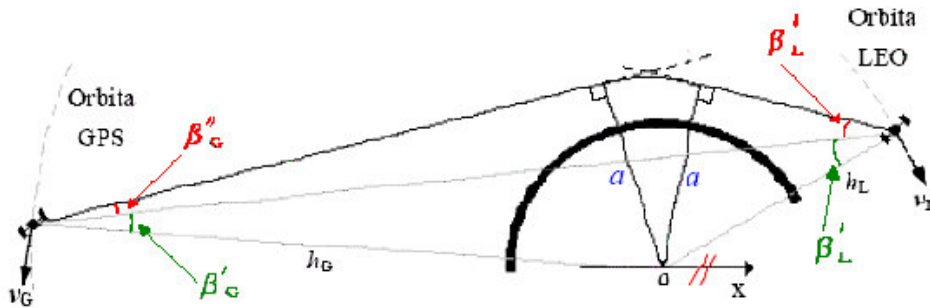


Figura 5.2 Incognite β''_G e β''_L nella risoluzione del sistema di due equazioni in due incognite risolto adottando il metodo delle piccole variazioni.

Per risolvere tale sistema si sviluppano i seni e coseni utilizzando le formule di addizione nel sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \gamma) &= \sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos(\alpha \pm \gamma) &= \cos \alpha \cos \gamma \mp \sin \alpha \sin \gamma \end{aligned}$$

dove α conterrà i valori di β'_G o β'_L e γ conterrà la piccola variazione $\delta\beta_G$ o $\delta\beta_L$. Andando a sostituire nel sistema 5.4 e ricordando che

$$\begin{cases} \sin(\delta\beta_G) \cong \delta\beta_G \\ \cos(\delta\beta_G) \cong 1 \\ \sin(\delta\beta_L) \cong \delta\beta_L \\ \cos(\delta\beta_L) \cong 1 \end{cases}$$

si ottiene il seguente sistema linearizzato

$$\begin{cases} |v_G| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta'_G + \beta''_G\right) \delta\beta_G + |v_L| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta'_L + \beta''_L\right) \delta\beta_L = A \delta\beta_G + B \delta\beta_L = 0 \\ -h_G \cos(\beta'_G + \beta''_G) \delta\beta_G + h_L \cos(\beta'_L + \beta''_L) \delta\beta_L = C \delta\beta_G + D \delta\beta_L = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Chiameremo inoltre con K_1 e K_2 le espressioni

$$\begin{cases} \frac{\Delta f_D}{f} c - [(\vec{v}_G \cdot \vec{u}_G + \vec{v}_L \cdot \vec{u}_L) - (\vec{v}_G \cdot \vec{u} + \vec{v}_L \cdot \vec{u})] = K_1 \\ h_G \sin(\beta'_G + \beta''_G) - h_L \sin(\beta'_L + \beta''_L) = K_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

A questo punto uguagliando le equazioni che contengono le piccole variazioni della 5.5 alle equazioni della 5.6 si costruisce il seguente sistema linearizzato dove le incognite sono $\delta\beta_G$ e $\delta\beta_L$.

$$\begin{cases} K_1 = A \delta\beta_G + B \delta\beta_L \\ K_2 = C \delta\beta_G + D \delta\beta_L \end{cases} \quad (5.7)$$

Iterativamente si fanno crescere le costanti β''_G o β''_L fino a quando le variabili $\delta\beta_G$ e $\delta\beta_L$ convergono ad un valore numerico piccolo, in questo caso 10^{-25} radianti. Calcolati β''_G e β''_L che soddisfano la condizione appena enunciata si calcola il valore dell'angolo di piegamento come

$$\alpha = \beta'_G + \beta''_G + \beta'_L + \beta''_L + \beta - \pi \quad (5.8)$$

5.1.3 Discussione dei risultati ottenuti

I due metodi danno dei risultati pressoché identici, impiegando tempi di elaborazione simili. C'è da dire però che l'ambiguità del primo metodo, relazionata alla non linearità del sistema, va a decadere una volta nota la natura del problema. Infatti gli angoli di apertura hanno un'elevazione massima che non raggiungerà mai valori maggiori o uguali a π , caso questo che vedrebbe trasmesso il segnale in direzione diametralmente opposta alla posizione del ricevitore, e questo implica che le funzioni circolari non daranno mai valori ambigui. Le figure che sono riportate di seguito mostrano il confronto fra i due metodi fatti su uno stesso RAOB di Roma 17/06/1998 ore 17.00 come differenza fra l'angolo di piegamento calcolato in modo diretto e l'angolo di piegamento calcolato in modo indiretto appena discusso. Per le grandezze in gioco i risultati verranno presentati su due grafici distinti, il terzo invece riporta la differenza delle differenze fra i due metodi analizzati per mostrare la validità di entrambi, anche se poi, per correttezza analitica, adotteremo il secondo metodo.

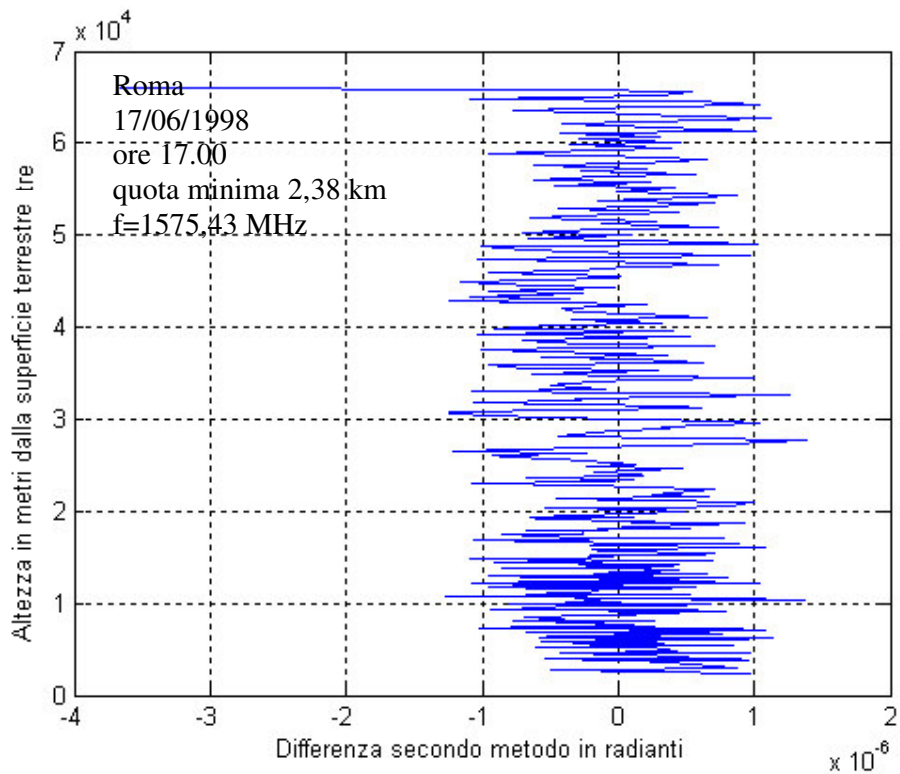
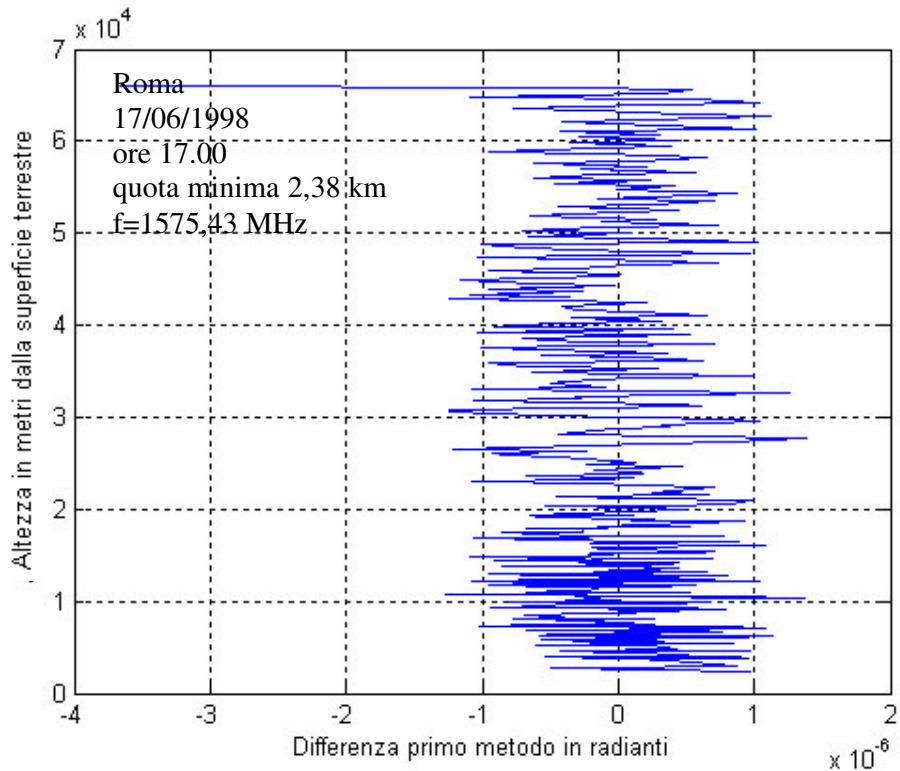


Figura 5.3 Differenza degli angoli di piegamento calcolati in modo diretto (sopra) e indiretto (sotto) rispettivamente con il primo e il secondo metodo risolutivo.

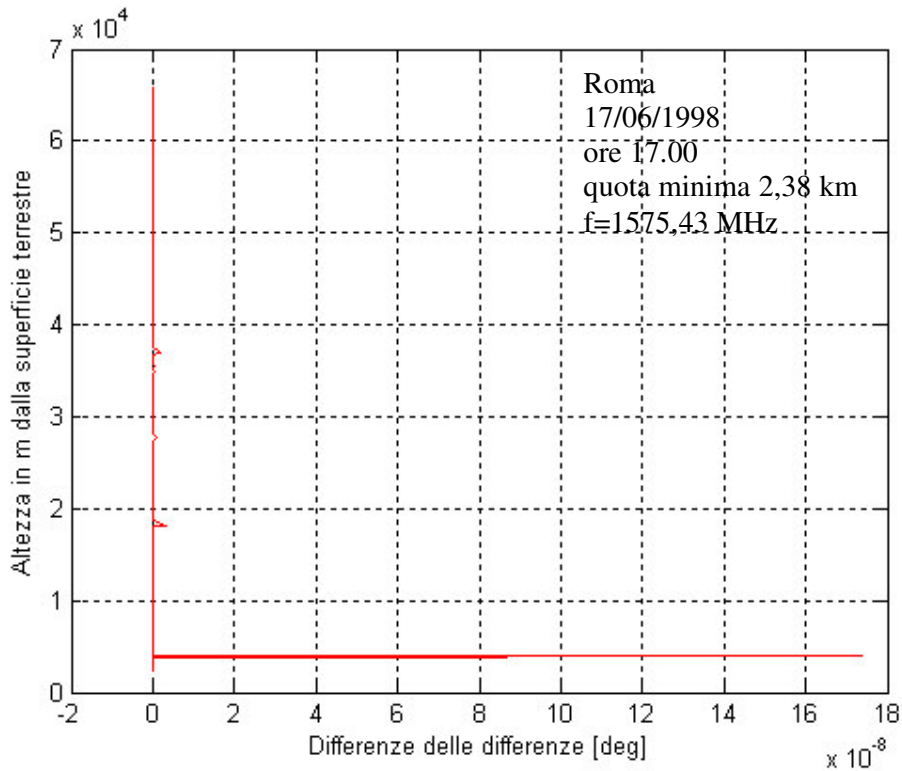


Figura 5.4 Differenza delle differenze degli angoli di piegamento calcolati in modo diretto e indiretto con i due metodi analizzati.

6 Tecnica di inversione

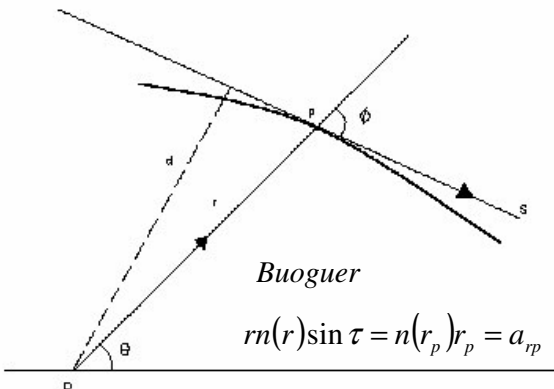
$$\alpha(a) = -2 \int_{r_p(a)}^{h_{atmo}} \frac{a}{\sqrt{[n(r)r]^2 - a^2}} \frac{1}{n(r)} \frac{dn(r)}{dr} dr$$

Relazione parametri atmosferici con i parametri geometrici

Integrale di Abel

Trasformata di Abel

Relazione parametri geometrici con i parametri geometrici

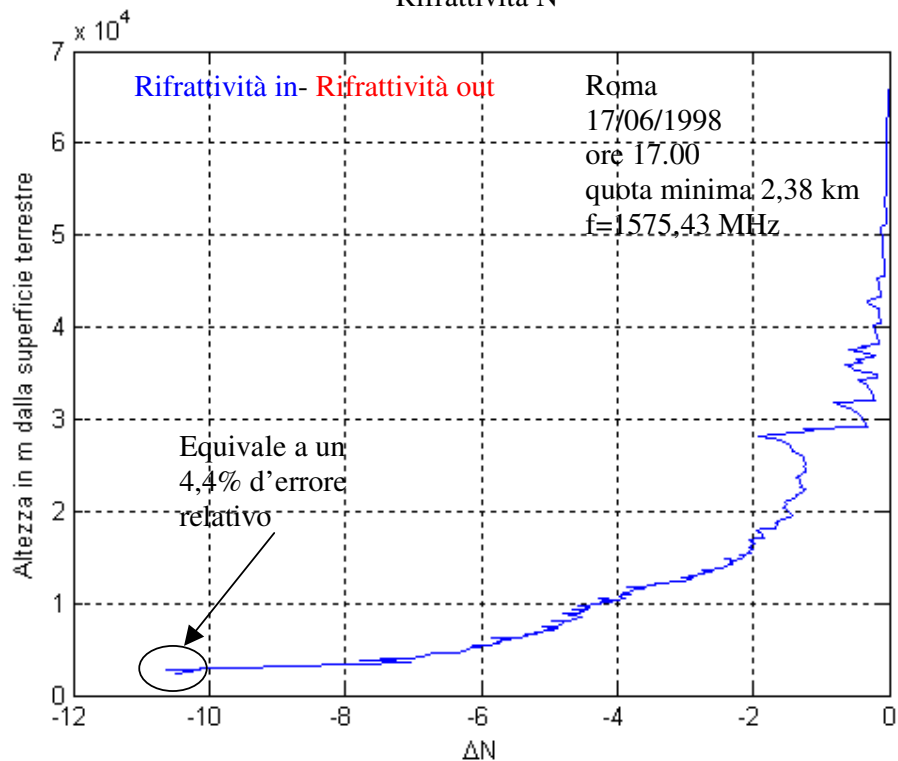
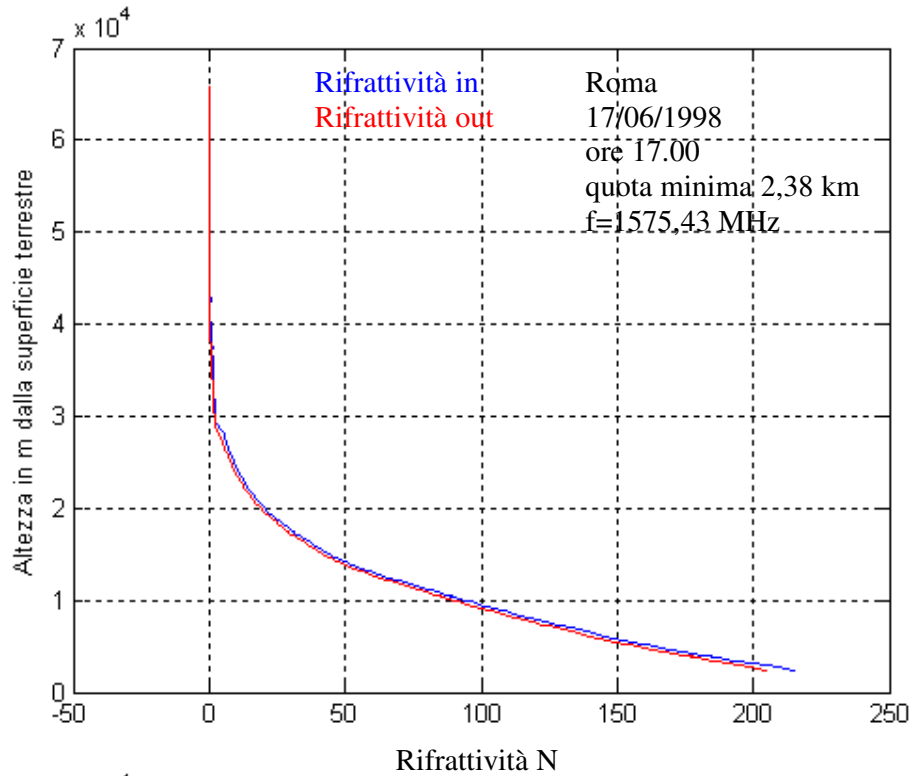


$$n(r_p) = e^{-\frac{1}{\pi} \int_{a_{rp}}^{a_h} \ln \left[\frac{a}{a_{rp}} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{a_{rp}^2} - 1 \right)} \right] \frac{d\alpha}{da} da}$$

Applicando all'integrale di Abel la trasformata di Abel e la legge di Bouguer, che non è altro che una generalizzazione della legge di Snell su una geometria sferica, si ottiene la relazione integrale che lega i parametri geometrici con quelli atmosferici. Siamo quindi in grado di effettuare il retrieval degli indici di rifrattività.

6.1 Risultati: rifrattività

Riporteremo il risultato più significativo, occultamento del 17/06/1998 ore 17.00, avendone fatti 48 sulla latitudine di Roma, 24 sulla latitudine delle Hawaii e 1 sulla latitudine Artica-Antartica. Di questo occultamento riporteremo la rifrattività in ingresso e quella in uscita con il relativo errore assoluto. Riporteremo inoltre la risoluzione spaziale verticale e orizzontale [1] [2] [4] [6].



6.2 Risultati: risoluzione

La risoluzione andrà a dipendere da tutti i contributi degli strati atmosferici attraversati dalla traiettoria e sarà valutata utilizzando la teoria di Fresnel. La figura sottostante mostra la zona di Fresnel, compresa fra il raggio continuo e il raggio tratteggiato e la superficie di Fresnel pari all'ellissoide con raggio maggiore F_n [15].

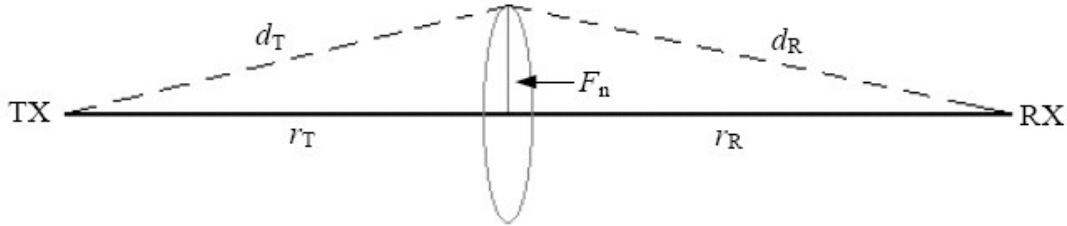


Figura 6.1 Geometria della zona di Fresnel

6.2.1 Risoluzione verticale

La risoluzione verticale è sicuramente un parametro di grande interesse per questo tipo d'applicazioni. Per la sua valutazione si fa l'ipotesi di partenza di supporre il mezzo in cui si propaga il segnale omogeneo. Si considera quindi la generica situazione in un istante di campionamento, come riportato nella figura 6.2 [14]

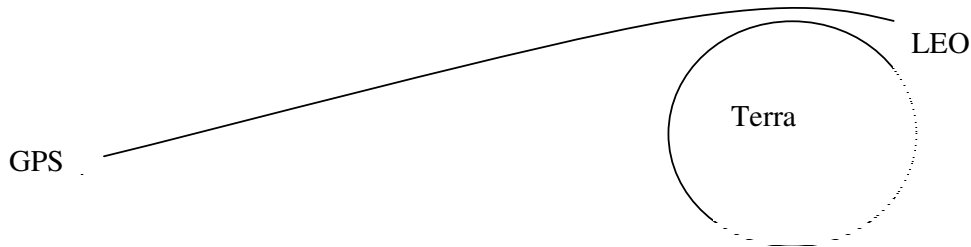


Figura 6.2 Generica traiettoria piegata dall'atmosfera terrestre

In realtà a formare il singolo campione di fase in un istante T nel LEO, sono tutti i raggi contenuti all'interno dell'ellissoide di Fresnel con raggio pari a F_n . Quindi la risoluzione verticale sarà limitata da questa dimensione poiché per la teoria della diffrazione il 50% della radiazione arriva al ricevitore combinando tutti le possibili direzioni all'interno dell'angolo solido che sottende la prima zona di Fresnel, mentre il restante 50% è distribuito secondo tutte le altre direzioni. Anche con l'ipotesi dell'ottica geometrica adottate la risoluzione verticale è strettamente legata alla teoria di Fresnel e ciò significa che la risoluzione verticale non può essere aumentata a piacere incrementando la frequenza di campionamento.

Riferendoci alla figura 6.1 per costruzione geometrica

$$d_T = \sqrt{r_T^2 + F_n^2} \cong r_T + \frac{F_n^2}{2r_T} \quad (6.1)$$

$$d_R = \sqrt{r_R^2 + F_n^2} \cong r_R + \frac{F_n^2}{2r_R}$$

avendo sviluppato in serie la radice fino al primo ordine. Poiché l'ellissoide di Fresnel è definito come il luogo dei punti per i quali la differenza di fase fra il cammino diretto e il cammino che passa per l'ellissoide di Fresnel è un multiplo intero della semi lunghezza d'onda, si avrà che

$$(d_T + d_R) - (r_T + r_R) = n \frac{\lambda}{2} \quad (6.2)$$

andando a sostituire i valori di d_T e d_R della 6.1 nella 6.2 si ha

$$F_n = \sqrt{n \lambda \frac{r_T r_R}{r_T + r_R}} \quad (6.3)$$

la risoluzione verticale sarà quindi direttamente proporzionale alla prima zona di Fresnel

$$\Delta h_y = 2 F_1 = 2 \sqrt{\lambda \frac{r_T r_R}{r_T + r_R}} \quad (6.4)$$

L'espressione appena ricavata è valida per un mezzo omogeneo con indice di rifrazione costante. Nel caso dell'atmosfera terrestre l'indice è naturalmente variabile e la formula della risoluzione verticale è modificata nel seguente modo [2]

$$\Delta h_y = 2 F_1 = 2 \sqrt{\lambda \frac{r_T r_R}{r_T + r_R} \left(1 + r_R \frac{d\alpha}{da} \right)^{-\frac{1}{2}}} \quad (6.5)$$

dove α è l'angolo di piegamento in un istante di campionamento e a il parametro di impatto.

6.2.2 Risoluzione orizzontale

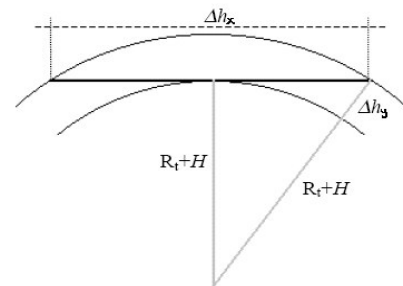
La risoluzione orizzontale è legata a quella verticale dalla relazione.

$$\Delta h_x = 2 \sqrt{(R_t + H + \Delta h_y)^2 - (R_t + H)^2} \cong 2 \sqrt{2 (R_t + H) \Delta h_y} \quad (6.6)$$

La figura a lato mostra i parametri utilizzati per il calcolo della della risoluzione orizzontale, legata alla risoluzione verticale

- R_t raggio della terra
- H altezza del raggio dalla superficie della terra
- Δh_y risoluzione verticale

Fisicamente rappresenta la fetta atmosferica attraversata dalla traiettoria seguita dal segnale



A seguire sono riportate le due risoluzioni per l'occultamento del 17/06/1998 ore 17.00

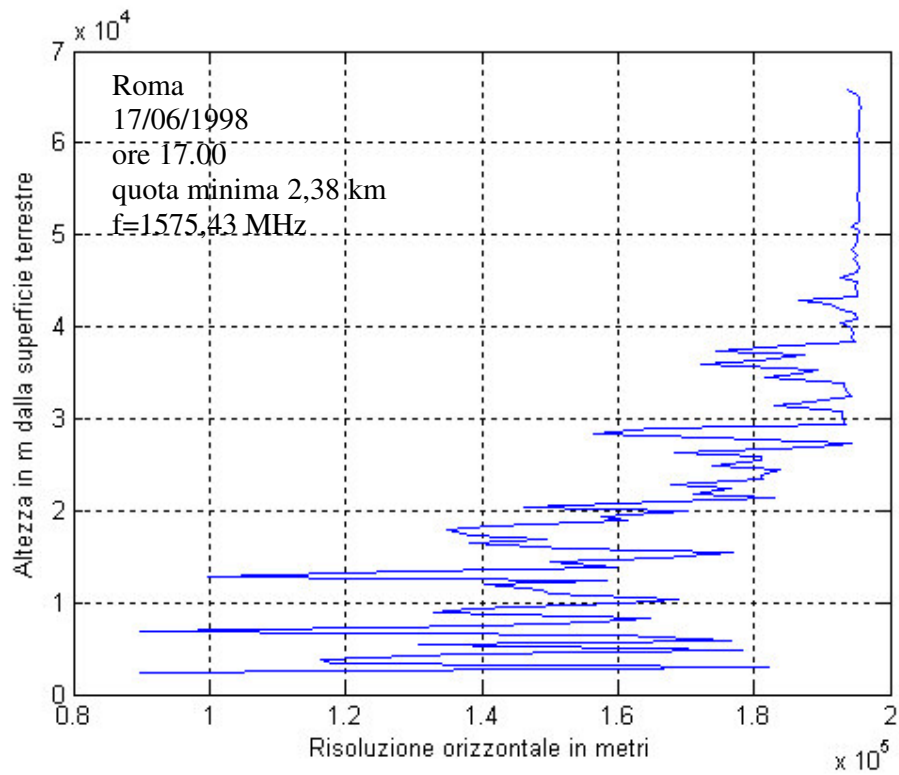
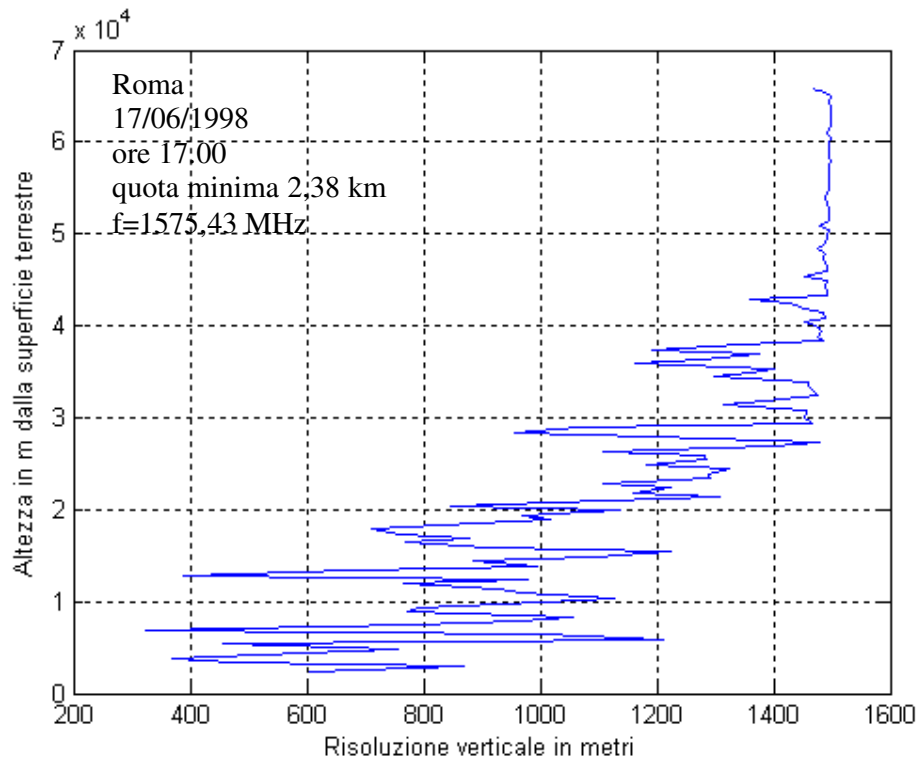
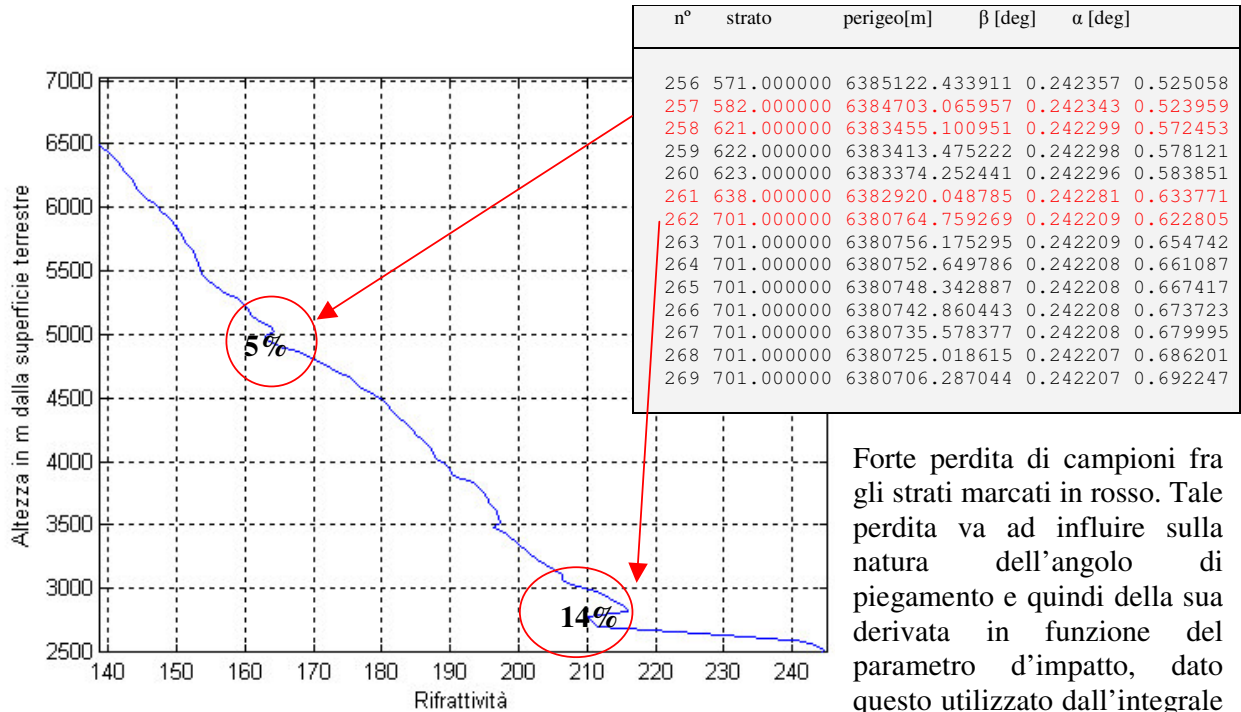


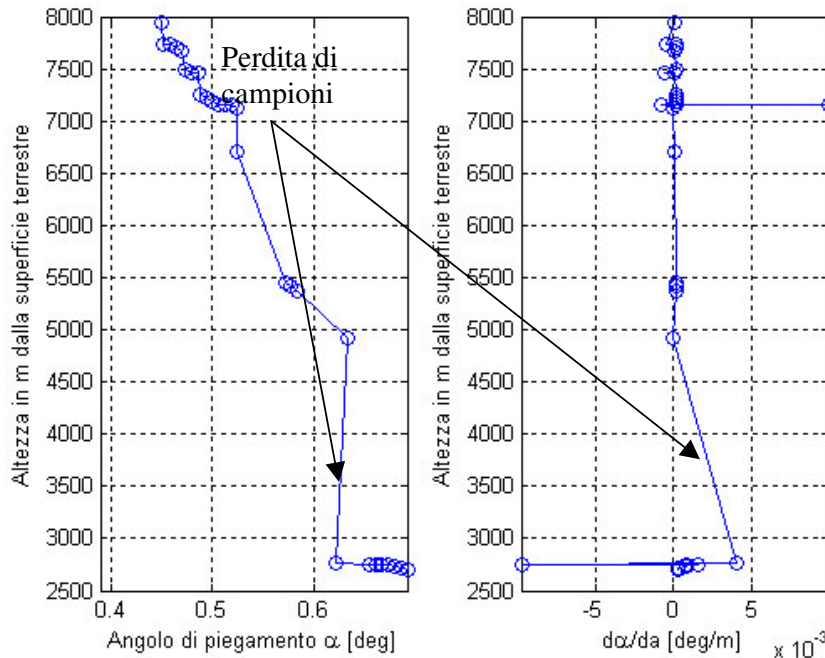
Figura 6.3 Risoluzione verticale e orizzontale per l'occultamento nella latitudine di Roma del 17/06/1998 ore 17.00. La risoluzione orizzontale è dell'ordine del km perché fisicamente rappresenta la fetta di atmosfera attraversata dalla traiettoria seguita dal segnale. La risoluzione verticale tende a stazionare nell'intorno dei 300-500 metri man mano che ci avviciniamo alla superficie terrestre.

7 Errore commesso

L'errore commesso è mediamente basso e si aggira nell'intorno del 3-5% nelle quote minime raggiunte dalla superficie terrestre. Ciò nonostante si sono presentati tre casi nei quali l'errore ha raggiunto picchi massimi uguali o maggiori del 10%. In questa sede andremo ad analizzare l'occultamento che ha commesso l'errore massimo riscontrato del 14%. Di questo riportiamo una parte dei dati salvati dal simulatore



Forte perdita di campioni fra gli strati marcati in rosso. Tale perdita va ad influire sulla natura dell'angolo di piegamento e quindi della sua derivata in funzione del parametro d'impatto, dato questo utilizzato dall'integrale di retrieval. Risulta quindi difficile ricostruire un tale andamento irregolare e da questo il conseguente errore relativo elevato.



In prossimità delle quote di interesse, quelle in cui si presenta un errore del 14%, si vede un forte aumento dell'umidità relativa dal 10% al 90% e una consecutiva diminuzione del 90 al 16% in soli 200 metri. Questa forte variazione conferisce alla rifrattività l'andamento irregolare cerchiato in rosso e questo implica un errore elevato commesso dal sistema.

Possiamo quindi concludere che l'errore compiuto dipende strettamente dall'andamento

8 Valutazione della quota minima raggiunta dalla superficie terrestre

Le quote minime raggiunte vanno da un massimo di 5,5 km dalla superficie terrestre per latitudini Artiche-Antartiche, a una media di 3 km nella latitudine di Roma (su 48 occultamenti) fino a una media di 2 km (su 24 occultamenti) nella latitudine delle Hawaii. Evidentemente la quota minima raggiunta dipende dal tipo di andamento altimetrico della temperatura e dell'umidità relativa. Nel lavoro completo sono stati fatti 5 confronti fra gli occultamenti di Roma, 24 sugli occultamenti delle Hawaii e uno di conferma sugli occultamenti delle zone artiche-antartiche. Da questi e da ulteriori prove fatte variando aleatoriamente la temperatura e l'umidità relativa e di conseguenza il tipo di indice di rifrazione siamo giunti alla conclusione che la quota minima raggiunta dipende principalmente dall'andamento della temperatura fra i 10 km e i 20 km dalla superficie terrestre, quindi nella tropopausa e inizio stratosfera, e in parte dall'umidità relativa al di sotto dei 7-8 km sempre dalla superficie terrestre, quindi principalmente nella troposfera. In particolar modo questa ultima affermazione acquista maggior vigore se confrontiamo il range di influenza dell'umidità relativa con l'altezza complessiva dell'atmosfera terrestre che approssimativamente è di 100 km. L'influenza altimetrica dell'umidità relativa su tutto l'occultamento è dell'ordine del 7-8%.

8.1 Confronto nella latitudine di Roma

Riportiamo in questa sede il confronto più significativo, fatto sulla latitudine di Roma, fra un occultamento estivo del 17/06/1998 ore 17.00 quota minima 2,38 km dalla superficie terrestre e un occultamento invernale del 10/12/1998 ore 05.00 quota minima 4,3 km dalla superficie terrestre. Il confronto si baserà principalmente sulla temperatura e sull'umidità relativa.

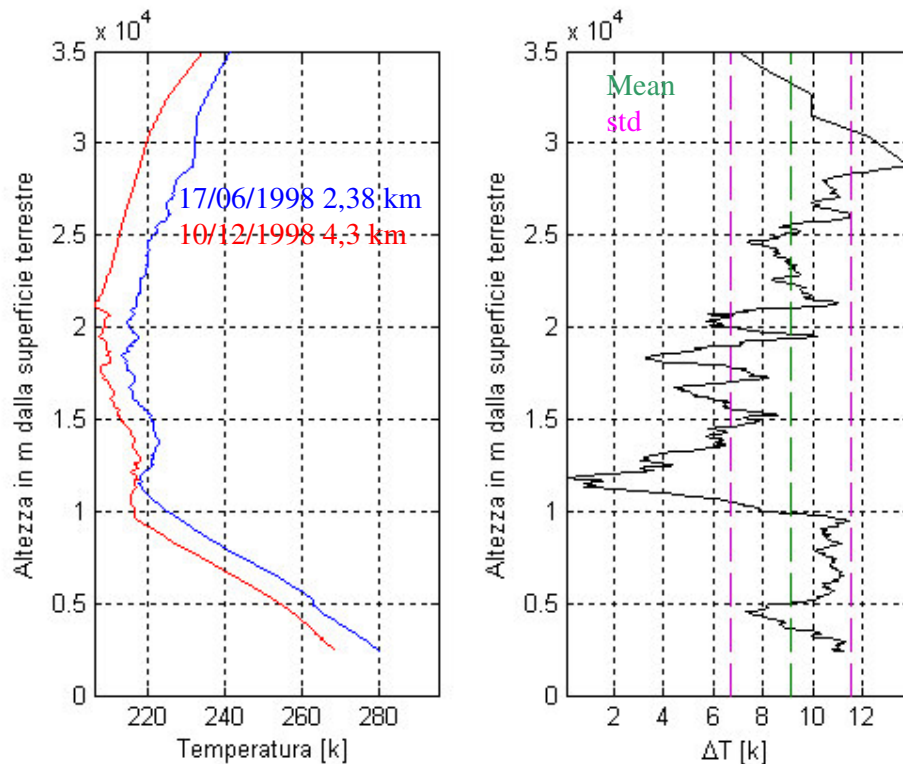


Figura 8.1 Nell'andamento della temperatura si vede chiaramente che il campione estivo ha una temperatura mediamente più alta di 9 K su tutte le quote rispetto al campione invernale..

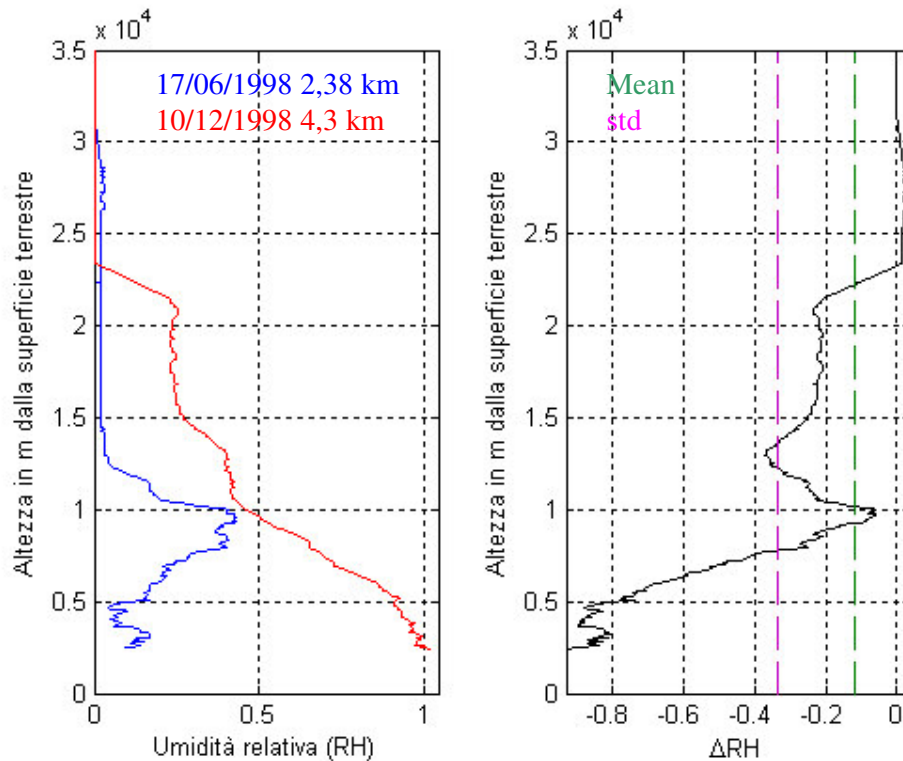
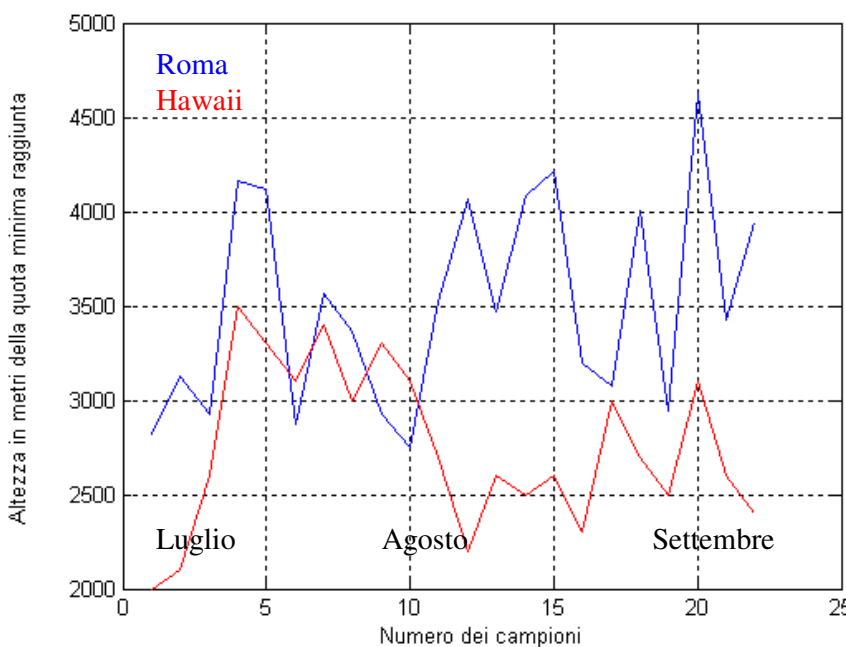


Figura 8.2 Nell'andamento dell'umidità relativa, a differenza della temperatura, si vede che il campione invernale ha un RH mediamente più alto del 10% su tutte le quote, con picchi massimi dell'80% al di sotto dei 5 km dalla superficie terrestre.

8.2 Confronto fra la latitudine di Roma e delle Hawaii nei mesi di Luglio, Agosto e Settembre



Il grafico riporta le quote minime raggiunte dalla superficie terrestre nei mesi di Luglio, Agosto e Settembre. Si vede chiaramente che nelle Hawaii le quote minime raggiunte sono inferiori, mediamente di 800 metri, rispetto a quelle di Roma. Anche in questo caso, come nel precedente, andremo a confrontare le grandezze fisiche altimetriche delle due latitudini su una media dei tre mesi. Questo confronto è fatto per convalidare il legame che c'è tra la quota minima raggiunta e la temperatura.

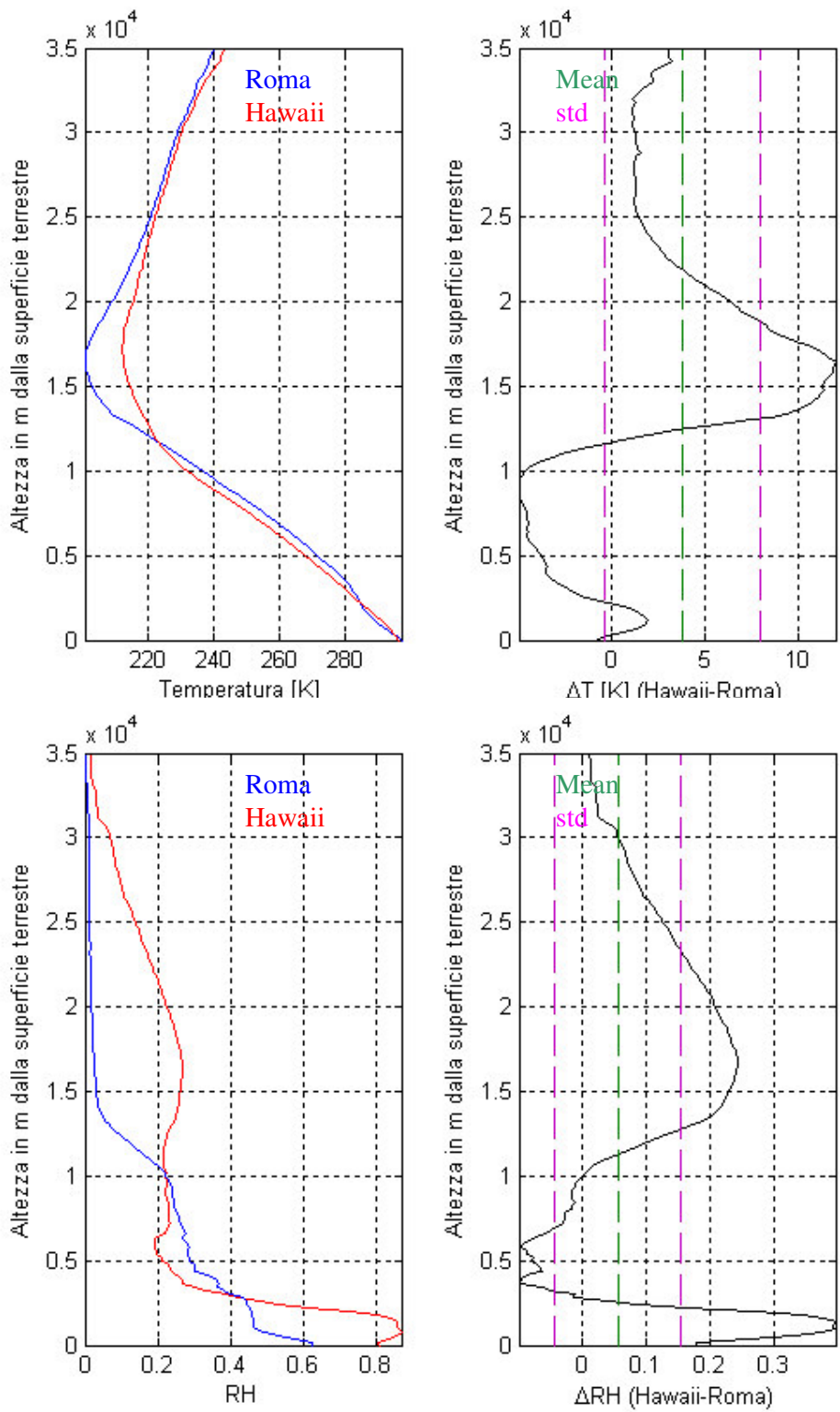


Figura 8.4 Andamenti della temperatura e dell'umidità relativa nelle due latitudini. Se vede chiaramente che nelle Hawaii si hanno mediamente 4 K maggiore in tutte le quote e un'umidità relativa del 7-8% maggiore su tutte le quote con picchi massimi del 30% al di sotto dei 5 km dalla superficie terrestre.

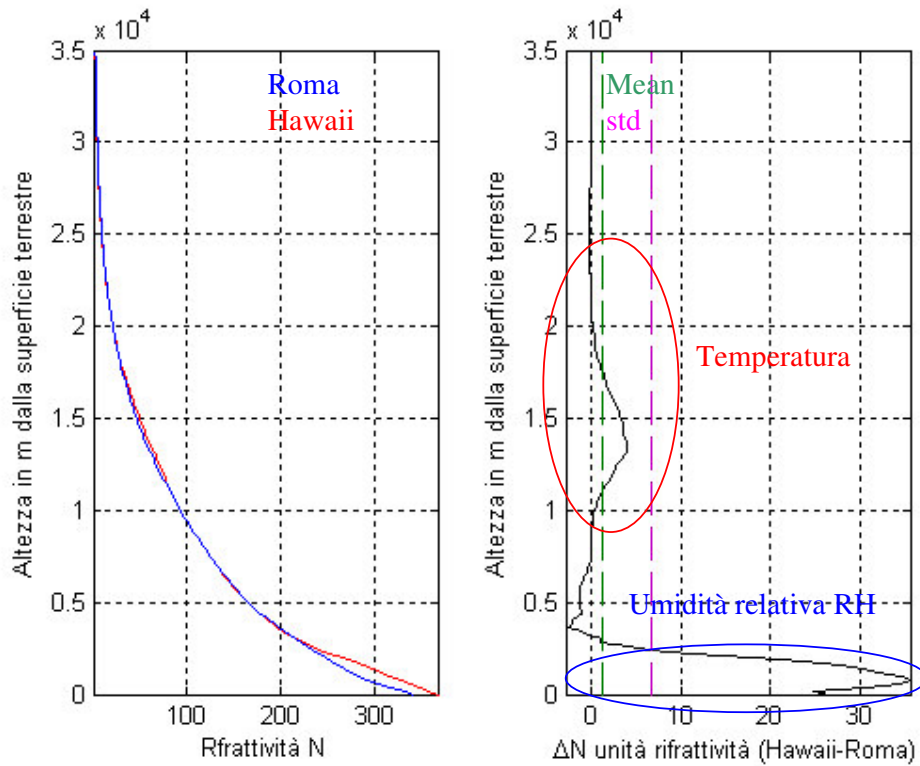


Figura 8.5 Influenza delle variazioni della temperatura e dell'umidità relativa nella natura della rfrattività. Si vede che la rfrattività delle Hawaii è maggiore di quella di Roma fra i 10 km e i 20-25 km dalla superficie terrestre (la differenza fra le due rfrattività è quella che si presenta nella maggior parte dei confronti anche delle latitudini romane) ad opera della temperatura, mentre raggiunge valori di 30 unità di rfrattività in più, ma al di sotto dei 5 km dalla superficie terrestre, ad opera dell'umidità relativa.

Attraverso questi confronti e altri fatti, ma non riportati, possiamo concludere che la quota minima raggiunta dipende principalmente dall'andamento della temperatura fra i 10 km e i 20 km dalla superficie terrestre, quindi nelle zone della tropopausa e inizio stratosfera, e in parte dall'umidità relativa al disotto dei 7-8 km dalla superficie terrestre, quindi nella troposfera.

9 RMS dell'errore

Per studiare statisticamente la prestazione del sistema analizzato, abbiamo calcolato il valore di RMS (Root Mean Square) dell'errore commesso per tutte le simulazioni effettuate nella latitudine di Roma. Analiticamente

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_{i, reale} - x_{i, stimato})^2}{N}} \quad (9.1)$$

dove $x_{i, reale}$ sono i valori del campione reale, $x_{i, stimato}$ sono i valori del campione stimato ed N è il numero dei campioni analizzati.

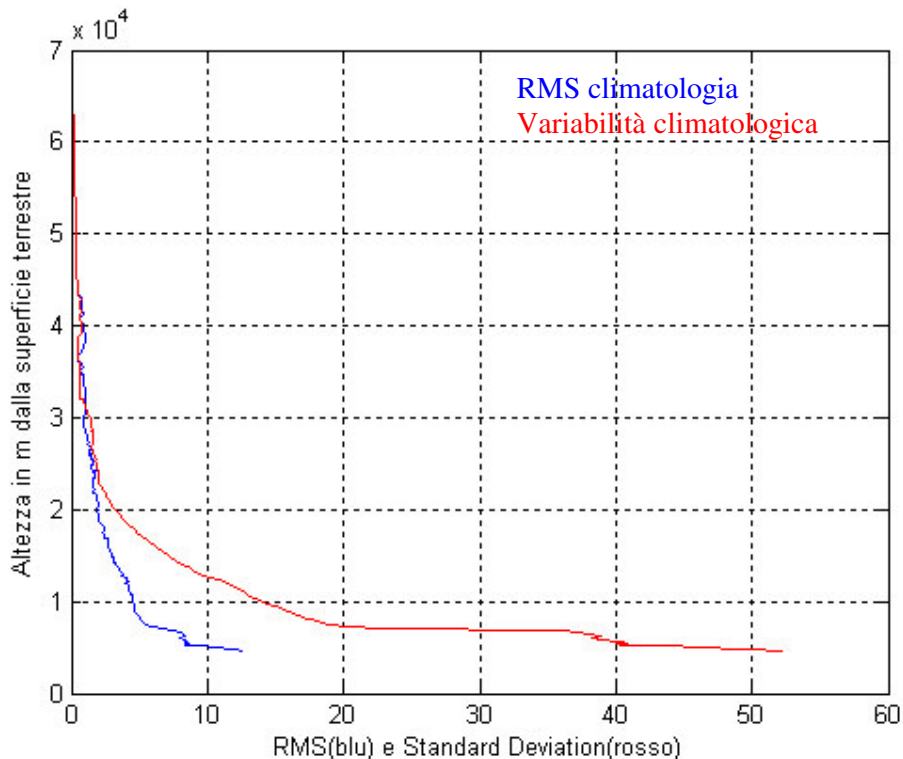


Figura 9.1 RMS dell'errore confrontato con la variabilità climatologica nell'anno 1998 nella latitudine di Roma.

L'RMS dell'errore ha valori considerevolmente minori della variabilità climatologica già al di sotto dei 10 km dalla superficie terrestre, quote nelle quali l'RMS è più piccolo del 70-80% rispetto alla variabilità climatologica. Questo risultato ci spinge a confermare la validità del sistema GPS-LEO per la valutazione dei profili di rifrattività atmosferica.

10 Conclusioni

L'analisi offerta in questo lavoro ha permesso di dimostrare come il sistema GPS-LEO sia in grado di fornire un nuovo strumento per l'analisi dell'atmosfera terrestre. Le potenzialità offerte sono indubbie sia da un punto di vista delle tempistiche (ricordiamo che impiega meno di un minuto per monitorare 100 km in verticale d'atmosfera), sia da un punto di vista dell'errore che mediamente staziona al 3% al 4% e sporadicamente raggiunge picchi del 10%.

Grazie all'utilizzo di dati RAOB siamo stati in grado di classificare i diversi tipi di risposte del sistema in diverse latitudini ed evidenziare le condizioni fisiche che ne permettono un utilizzo ottimale. Da un punto di vista strettamente pratico il sistema sembra offrire delle performance migliori su latitudini equatoriali dove la temperatura e la presenza di umidità sono molto maggiori rispetto a quelle ritrovate nella latitudine italiana di Roma, ma nelle stesse latitudini c'è la possibilità di riscontrare delle forti variazioni di umidità che, come abbiamo visto nel capitolo 7, comportano una crescita dell'errore.

Diametralmente opposto è invece il comportamento del sistema su un'atmosfera completamente priva di umidità, quindi con rifrattività esclusivamente dry, come può presentarsi in zone artiche-antartiche, dove la dinamica delle traiettorie presenterà delle quote minime raggiunte sicuramente maggiori, dell'ordine dei 5-6 km dalla superficie terrestre (come esempio possiamo riferirci all'occultamento fatto su indice teorico), ma con un errore commesso decisamente inferiore, circa

dell'1-2%. Questa particolarità, che per il telerilevamento può essere vista come un limite, potrebbe essere sfruttata per lo studio delle scintillazioni nelle quote alte dell'atmosfera.

Inoltre da una ricerca in letteratura abbiamo confrontato i risultati forniti da simulatore con i dati reali forniti nell'articolo [2] e abbiamo riscontrato lo stesso ordine di grandezze dell'errore in tutte e tre le latitudini analizzate.

11 Bibliografia

1. **Riccardo Notarpietro**: *Inversione di misure GPS in condizioni di radio occultamento per il retrieval di profili atmosferici*. Tesi di Dottorato, Politecnico di Torino.
2. Kursinski E. R., G. A. Hajj, J. T. Schofield, R. P. Linfield, and K. R. Hardy, *Observing Earth's atmosphere with radio occultation measurements using the Global Positioning System*, *J. Geophys. Res.*, 102, 23429-23465, 1997.
3. Dennis J. E., and R. B. Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
4. Gorbunov M. E., and S. V. Sokolovskiy, *Remote sensing of refractivity from space for global observation of atmospheric parameters*, Max-Planck Institute for Meteorology Rep. 119, Hamburg, Germany, 1993.
5. Bassiri B., and G. A. Hajj, Higher-order ionospheric effects on the global positioning system observables and means of modeling them, *Manuscr. Geod.*, 18, 280-289, 1993.
6. Kursinski E. R., G. A. Hajj, K. R. Hardy, L. J. Romans, and J. T. Schofield, Observing tropospheric water vapor by radio occultation using the Global Positioning System, *Geophys. Res. Lett.*, 22, 2365-2368, 1995.
7. Smith E. K. and S. Weintraub, The constants in the equation for atmospheric refractive index at radio frequencies, *Proc. IRE*, 41, 1035-1037, 1953.
8. Vorob'ev V. V., and T. G. Krasilnikova, Estimation of the accuracy of the atmospheric refractive index recovery from Doppler shift measurements at frequencies used in the NAVSTAR system, *Phys. Atmos. Ocean.*, 29, 602- 609, 1994.
9. Ware, R., M. Exner, D. Feng, M. Gorbunov, K. Hardy, B. Herman, Y. Kuo, T. Meehan, W. Melbourne, C. Rocken, W. Schreiner, S. Sokolovskiy, F. Solheim, X. Zou, R. Anthes, S. Businger, and K. Trenberth, GPS sounding of the atmosphere from Low Earth Orbit: preliminary results, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 77, 19-40, 1996.
10. Yuan L., R. A. Anthes, R. H. Ware, C. Rocken, W. Bonner, M. Bevis, and S. Businger, Sensing climate change using the global positioning system, *J. Geophys. Res.*, 98, 14925-14937, 1993.
11. Yunck T. P., G. F. Lindal, and C. H. Liu, The role of GPS in precise Earth observation, *Proc. Position, Location and Navigation Symp.*, Orlando, 1988.
12. Livingstone, D. C., *The physics of microwave propagation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.
13. McCartney E. J., *Optics of the atmosphere: scattering by molecules and particles.*, Wiley, New York, 1976.
14. Papas C. H., *Theory of electromagnetic wave propagation*, McGraw-Hill, New York, 1965.
15. C. Mencuccini V. Silvestrini, *Fisica 2: elettromagnetismo - ottica*

Per ulteriori informazioni :
Ricciarelli Ivano
e-mail: iv_riccia@aliceposta.it